二模考试数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．C；2．A；3．D；4．C；5．D；6．C；7．B；8．B．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．AC；10．AD；11．ACD；12．BC．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\dfrac{5\pi}{6}$；14．60；15．5；16．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：（1）选择条件①②

由 $S_5=50$，得 $5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=5(a_1+2d)=50$，即 $a_1+2d=10$；　　……1 分

由 S_1,S_2,S_4 成等比数列，得 $S_2^2=S_1S_4$，

即 $4a_1^2+4a_1d+d^2=4a_1^2+6a_1d$，即 $d=2a_1$；　　……2 分

解得 $a_1=2$，$d=4$，　　……3 分

因此 $a_n=4n-2$．　　……4 分

选择条件①③

由 $S_5=50$，得 $5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=5(a_1+2d)=50$，即 $a_1+2d=10$；　　……1 分

由 $S_6=3(a_6+2)$，得 $\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=3a_1+3a_6=3a_6+6$，即 $a_1=2$；　　……2 分

解得 $d=4$，　　……3 分

因此 $a_n=4n-2$．　　……4 分

选择条件②③

由 S_1,S_2,S_4 成等比数列，得 $S_2^2=S_1S_4$，$4a_1^2+4a_1d+d^2=4a_1^2+6a_1d$，

即 $d=2a_1$ ……1 分

由 $S_6=3(a_6+2)$，得 $\frac{6(a_1+a_6)}{2}=3a_1+3a_6=3a_6+6$，即 $a_1=2$ ……2 分

解得 $d=4$， ……3 分

因此 $a_n=4n-2$ ； ……4 分

（2）由 $a_1=2$， $a_n=4n-2$ 可得

$b_1=3$， $b_n-b_{n-1}=2a_n=8n-4$， ………5 分

当 $n\geq 2$ 时，$(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)$

$=(8n-4)+(8n-12)+\cdots+12=\frac{[(8n-4)+12](n-1)}{2}=4n^2-4$，

即 $b_n-b_1=4n^2-4$，则 $b_n=4n^2-1$ ………7 分

当 $n=1$ 时，$b_1=3$，符合 $b_n=4n^2-1$，

所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_n=4n^2-1$； ………8 分

则 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$， ………9 分

因此 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$ ……10 分

评分说明：（1）中选择条件①②，$a_1=2$，$d=4$ 解对一个即得 1 分.

（2）中 $b_1=3$，$b_n-b_{n-1}=2a_n=8n-4$ 解对一个即得 1 分.

18．解析：（1）由 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$ 可知 $\cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$，…1 分

即 $\cos A\cos C+\sin A\sin C-\cos A\cos C+\sin A\sin C=\frac{3}{2}$,

可得$\sin A\sin C=\dfrac{3}{4}$. ·········2 分

由$\vec{m}//\vec{n}$可得$b^2-ac=0$， ·········3 分

由正弦定理可知$\sin^2 B=\sin A\sin C=\dfrac{3}{4}$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ·········4 分

因此$B=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$.

分别代入$\cos(A-C)+\cos B=\dfrac{3}{2}$，可知当$B=\dfrac{2\pi}{3}$时，$\cos(A-C)=2$，不成立.

因此$B=\dfrac{\pi}{3}$. ·········6 分

（2）由$B=\dfrac{\pi}{3}$可知$\cos(A-C)=1$，即$A=C$， ·········7 分

因此ΔABC为等边三角形，即$a=b=c$， ·········8 分

解法一：

$$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD=\frac{1}{2}b(5-a)\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a(5-a)=\sqrt{3}，$$

整理可得$a(5-a)=4$，即$a^2-5a=-4$ ·········10 分

由余弦定理可知，在ΔABD中

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=c^2+25-5c=a^2+25-5a=21$$

因此AD的长为$\sqrt{21}$. ·········12 分

解法二：

$$S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin B-\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}c(5-a)=\sqrt{3}，$$

整理可得 $c(5-c)=4$，即 $c^2-5c=-4$ ·········10 分

由余弦定理可知，在 ΔABD 中

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=c^2+25-5c=21,$$

因此 AD 的长为 $\sqrt{21}$. ·········12 分

评分说明：(1) 中由 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 解得 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，未进行取舍扣一分.

19.（12 分）解法 1:(1) 联结 AM, AC，$AC\cap DB=O$，因为 $PB=PD$，所以 $PO\perp BD$，

又因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，

所以 $BD\perp PC$， ···2 分

又 $PE=PF$，所以 $EF//BD$，所以 $EF\perp PC$，

由已知条件得，$BD=2, AC=2\sqrt{3}$

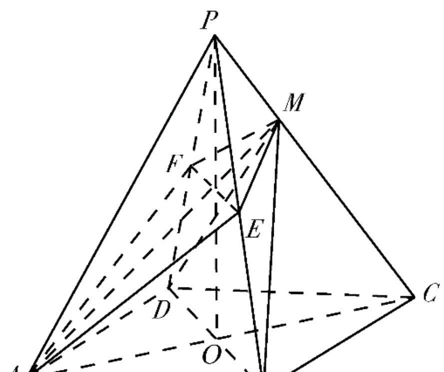
由余弦定理得 $\cos\angle APC=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\frac{3^2+3^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\times3\times3}=\frac{1}{3}$，

$$AM^2=PA^2+PM^2-2PA\cdot PM\cdot\cos\angle APC=9+1-2\times3\times1\times\frac{1}{3}=8,$$

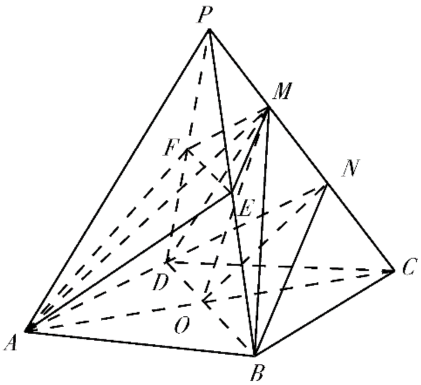
所以 $PA^2=PM^2+AM^2$，所以 $PC\perp AM$， ·····································4 分

因为直线 AM, EF 相交，且 AM, EF 都在平面 $AEMF$ 内

所以直线 $PC\perp$ 平面 $AEMF$. ···5 分



（2）



取 N 为 MC 的中点，联结 ON, BN, DN，则 $ON // AM$，又 $EF // BD$，

所以平面 $AEMF$ // 平面 BND，……………………………………………………7 分

因为直线 $BD \perp$ 平面 PAC，联结 MO，

所以 $MO \perp BD, NO \perp BD$，……………………………………………………9 分

所以 $\angle MON$ 为平面 MDB 与平面 $AEMF$ 所成二面角的平面角，

由已知可得，所以 $ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{2}$，

$OM = \sqrt{ON^2 + MN^2} = \sqrt{3}$ ……………………………………………………11 分

所以 $\sin \angle MON = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以平面 MDB 与 $AEMF$ 所成二面角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………12 分

评分说明：①找出与平面 $AEMF$ 平行的平面得 2 分；作出二面角的平面角得 2 分；

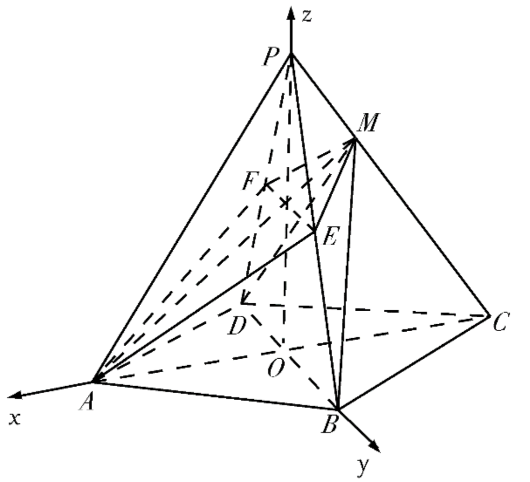
②求出二面角的平面角所在直角三角形的两边长得 2 分，结果 1 分

解法 2:（1）联结 AC，$AC \cap BD = O$，联结 PO，

因为 $PD = PB, PA = PC$，所以 $PO \perp BD, PO \perp AC$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，……………………………………………………2 分

以 OA 所在的直线为 x 轴，OB 所在直线为 y 轴，OA 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由已知可得：$A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$B\left(0,1,0\right)$，$C\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，$D\left(0,-1,0\right)$，$P\left(0,0,\sqrt{6}\right)$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\left(-2\sqrt{3},0,0\right)+\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3},0,\sqrt{6}\right)=\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

因为$PE=PF$，所以$EF//BD$，

因为$\overrightarrow{DB}=\left(0,2,0\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(-\sqrt{3},0,-\sqrt{6}\right)$，

所以$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(-\sqrt{3},0,-\sqrt{6}\right)\cdot\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0$，

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(-\sqrt{3},0,-\sqrt{6}\right)\cdot\left(0,2,0\right)=0$，

所以$PC\perp AM,PC\perp EF$，　　　　　　……………………………………………4 分

又EF与AM相交，且AM,EF都在平面$AEMF$内

所以$PC\perp$平面$AEMF$．　　　　……………………………………………………5 分

评分说明：说明$PO\perp AC,PO\perp BD$是建立坐标系的基础，得 2 分

证明$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，各得 1 分，结论 1 分

（2）因为$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\left(-\sqrt{3},-1,0\right)+\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3},0,\sqrt{6}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}=\left(-\sqrt{3},1,0\right)+\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3},0,\sqrt{6}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

……………………………………………………7 分

设平面 MDB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}$ ……………………………………………………8 分

即 $\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z=0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，令 $z=\sqrt{2}$， $x=4$， $y=0$，

所以 $\vec{m}=\left(4,0,\sqrt{2}\right)$， ……………………………………………………10 分

由（1）可知， $\overrightarrow{PC}=\left(-\sqrt{3},0,-\sqrt{6}\right)$ 是平面 $AEMF$ 的法向量,，

设平面 MDB 和平面 $AEMF$ 所成的二面角大小为 θ，

所以 $\left|\cos\theta\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ………………………11 分

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以平面 MDB 与 $AEMF$ 所成二面角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………12 分

20.（12 分）解：(1)因为 $\mu=82$，$\sigma=8$，所以考试成绩优秀者得分 $\xi\geq 90$ 即为 $\xi\geq\mu+\sigma$.

由 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)\approx 0.68$，得 $P(\xi\geq\mu+\sigma)\approx\dfrac{1}{2}(1-0.68)=0.16$. ……3 分

由此，估计该市此次司法考试成绩优秀者人数可达 $20\times 0.16=3.2$ 万人. ……4 分

（2）方法一

设抽奖一次获得手机流量为 X G，则 $P(X=5)=\dfrac{1}{10}$， $P(X=1)=\dfrac{9}{10}$， ……8 分

所以抽奖一次获得手机流量的期望值为 $E(X)=5\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{9}{10}=1.4$（G）. …10 分

又由于 20 万人均参与抽奖，且优秀者抽奖两次，所以抽奖的总次数为 $20+3.2=23.2$ 万次， ……………………………………………………11 分

因此，估计此次抽奖活动赠予的手机流量总值为 $23.2\times 1.4=32.48$（万 G）.

……………………………………12 分

方法二

设每位抽奖者获赠的手机流量为 X G，则 X 的值为1，2，5，6，10．

于是

$P(X=1)=(1-0.16)\times\frac{9}{10}=\frac{756}{1000}$,

$P(X=2)=0.16\times(\frac{9}{10})^2=\frac{1296}{10000}$,

$P(X=5)=(1-0.16)\times\frac{1}{10}=\frac{84}{1000}$,

$P(X=6)=0.16\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\times2=\frac{288}{10000}$,

$P(X=10)=0.16\times(\frac{1}{10})^2=\frac{16}{10000}$.　　　…………………………………9 分

所以 $E(X)=1\times\frac{756}{1000}+2\times\frac{1296}{10000}+5\times\frac{84}{1000}+6\times\frac{288}{10000}+10\times\frac{16}{10000}=1.624$（G）

………………………………11 分

因此，估计此次抽奖活动赠予的手机流量总值为 $20\times1.624=32.48$（万 G）．

………………………………12 分

21．（12 分）解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=|\ln x|+ax=\begin{cases}\ln x+ax, x\ge1\\-\ln x+ax, 0<x<1\end{cases}$，得 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+a, x\ge1\\-\frac{1}{x}+a, 0<x<1\end{cases}$；

………………………1 分

由于 $a<0$，则 $-\frac{1}{x}+a<0$，即在区间 $(0,1)$ 上 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

………………………2 分

当 $-1<a<0$ 时，

x	$(1,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增		减

………………………4 分

当$a\le -1$时，$\frac{1}{x}+a\le 0$，即在区间$[1,+\infty)$上$f'(x)\le 0$，函数$f(x)$单调递减；

…………………………5 分

综上：

当$-1<a<0$时，函数$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，在区间$(1,-\frac{1}{a})$上单调递增，在区间$(-\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减；

当$a\le -1$时，函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减；

…………………………6 分（两种情况分析都正确得 1 分）

（2）结合第（1）问答案，只有当$-1<a<0$时函数$f(x)$才可能存在三个零点；

当$-1<a<0$时，

$f(1)=a<0$，

$f(e^a)=-\ln(e^a)+a\cdot e^a=a(e^a-1)>0\ (0<e^a<1)$，

在区间$(0,1)$上恰好存在一个零点；　　………7 分（不使用零点存在性定理不得分）

在区间$[1,+\infty)$上存在两个零点，需要保证$f(-\frac{1}{a})=\ln(-\frac{1}{a})-1>0$，即$-\frac{1}{e}<a<0$，

…………………………8 分（不使用零点存在性定理不得分）

且此时$f(1)=a<0$，$f(-\frac{1}{a})>0$，

在区间$(1,-\frac{1}{a})$上存在一个零点　……………9 分（不使用零点存在性定理不得分）

同时$\frac{1}{a^2}>-\frac{1}{a}$，$f(\frac{1}{a^2})=2\ln(-\frac{1}{a})+\frac{1}{a}$，

设$t=-\frac{1}{a}>e$，对于函数$y=2\ln t-t$，$y'=\frac{2-t}{t}<0$，$y<2\ln t-t|_{t=e}=2-e<0$，

故$f(\frac{1}{a^2})<0$，且$f(-\frac{1}{a})>0$，在区间$(-\frac{1}{a},+\infty)$上存在一个零点.

………11 分（不使用零点存在性定理不得分）

总之，当$-\frac{1}{e}<a<0$时，在区间$(0,1)$、$(1,-\frac{1}{a})$、$(-\frac{1}{a},+\infty)$上各存在一个零点. ………12 分

22.（12 分）解：(1) 由已知可知，设直线l的斜率为k，则直线l的方程为$y=kx+2p$，

由$\begin{cases}x^2=2py\\ y=kx+2p\end{cases}$，消元得：$x^2-2pkx-4p^2=0$.

所以$x_1+x_2=2pk,x_1\cdot x_2=-4p^2$，　…………………………………………………2 分

因为点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$ 在抛物线 Ω 上，所以 $x_1^2=2py_1, x_2^2=2py_2$，

所以 $x_1^2x_2^2=4p^2y_1y_2$，所以 $y_1\cdot y_2=4p^2=64$，所以 $p=4$，

所以抛物线 Ω 的标准方程为 $x^2=8y$ ……………………………………………3 分

准线方程为 $y=-2$． …………………………………………………………4 分

（2）由（1）得抛物线 Ω 的方程为 $x^2=8y$，设 $C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，

由题设可知，C,D 两点关于直线 $l:y=kx+8$ 对称，

则 $\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}\cdot k=-1$，所以 $x_3+x_4=-\dfrac{8}{k}$． ……………………………………5 分

又 $\dfrac{y_3+y_4}{2}=k\dfrac{x_3+x_4}{2}+8$，得：$y_3+y_4=8$，……………………………………6 分

同时由（1）知：$x_1+x_2=8k, x_1\cdot x_2=-64$，……………………………………7 分

因为 C,D 在以线段 AB 为直径的圆上，所以 $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$，

即 $AC\perp BC$，$AD\perp BD$，

所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(x_1-x_3\right)\left(x_2-x_3\right)+\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)=0$，

即 $\left(x_1-x_3\right)\left(x_2-x_3\right)+\left(\dfrac{x_1^2}{8}-\dfrac{x_3^2}{8}\right)\left(\dfrac{x_2^2}{8}-\dfrac{x_3^2}{8}\right)$

$=\dfrac{\left(x_1-x_3\right)\left(x_2-x_3\right)}{64}\left[64+x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)x_3+x_3^2\right]=0$

所以 $64+x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)x_3+x_3^2=0$，

代入上式可得：$8kx_3+x_3^2=0$， ……………………………………………………9 分

由 $x_4^2=8y_4, x_3^2=8y_3$ 可得 $\left(-\dfrac{8}{k}-x_3\right)^2=8\left(8-\dfrac{x_3^2}{8}\right)$，

化简得 $x_3^2+\dfrac{8}{k}x_3+\dfrac{32}{k^2}-32=0$，

所以 $\left(x_3^2+\dfrac{8}{k}x_3+\dfrac{32}{k^2}-32\right)+\left(8kx_3-\dfrac{8}{k}x_3-\dfrac{32}{k^2}+32\right)=0$，

所以 $8kx_3-\dfrac{8}{k}x_3-\dfrac{32}{k^2}+32=0$，

即$\left(k^2-1\right)\left(kx_3+4\right)=0$，　　　　…………………………………………………10 分

若$kx_3+4=0$，则$x_3=x_4=-\dfrac{4}{k}$与题设不符，

所以$k^2-1=0$，解得$k=\pm 1$．　　　　…………………………………………………11 分

所以直线l的斜率为1或-1．　　　　…………………………………………………12 分

解法二：由$8kx_3+x_3^2=0$，　　　　…………………………………………………9 分

解得：$x_3=0$，或$x_3=-8k$，

由$x_4^2=8y_4, x_3^2=8y_3$，可得$\left(-\dfrac{8}{k}-x_3\right)^2=8\left(8-\dfrac{x_3^2}{8}\right)$，

化简得$x_3^2+\dfrac{8}{k}x_3+\dfrac{32}{k^2}-32=0$，

若$x_3=0$，则$\dfrac{32}{k^2}-32=0$，则$k=\pm 1$，

若$x_3=-8k$，则$64k^2-64+\dfrac{32}{k^2}-32=0$，

解得$k=\pm 1$或$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　　　　…………………………………………………10 分

其中$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时$x_4=x_3$不合题意．…………………………………………………11 分

所以直线l的斜率为1或-1．　　　　…………………………………………………12 分